

第4章 低サイクル疲労

4-4 ヒステリシスループの数理処理

■ ヒステリシスループを如何に抽出するのか？

次に、(4の2)章の最後で触れた2番目の設問：

(2) 実ひずみ波形よりヒステリシスループを如何に抽出するのか？

を解説したい。

部材には複雑に変動する負荷(時刻歴応力波形)が働いており、一般的に、疲労寿命の推定にはその波形の中から疲労に影響を及ぼす応力頻度分布や応力-ひずみのヒステリシスループを求める必要がある。

その為、精確な推定には「波形の読み取り法」がポイントになってくる。

この分野の研究は、**応力頻度計数法**(Load history Counting Method)や、**波形計数法**(Cycle Counting)と言われ、長年、研究の対象となり、その間、種々の手法が生み出されてきた。

名称程度ではあるが、代表的なものを上げれば以下のものとなる。

- ① ピーク法 (Peak Counting) :
応力またはひずみ波形の最大および最小を全て計数する。
- ② レンジ法 (Simple-range Counting) :
応力またはひずみの変化幅を計数する。
- ③ レンジペア法 (Range-pair Counting) :
応力またはひずみの上昇レンジと下降レンジの等しい対を作り、これを順次抜き出し計数する。

この内、塑性域までの対象だとヒステリシスループの抽出が重要となるので、これを扱うことができるレンジペア法が適しているよう。

中でも、このレンジペア法の発展型である**レインフロー法**(Rainflow Counting)が、世界的に広く使われている。これは、遠藤達雄らが1968年に発表したものだ。

レインフロー法の特徴としては、以下の点が挙げられる。

1. 変動荷重を受けている材料の応力-ひずみ曲線と自然な対応関係を持ち、閉じたヒステリシスループを正確に選

び出すことができる。

2. 閉じたヒステリシスループを形成していないひずみ範囲は1/2サイクルで計数する。

3. コンピュータ処理に適している。

ここで、1.に関する特徴について補足説明しておこう。

例えば、**図4.13**で示した2つのひずみ時刻歴波形(a), (b)を比較してみる。上図がひずみ時刻歴波形、下図がそれに対する応力-ひずみ応答である。

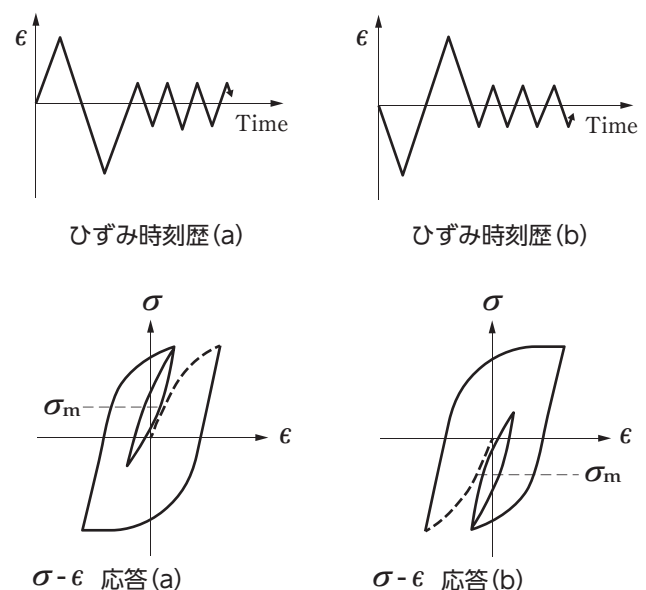


図4.13 応力と塑性ひずみの関係

(a), (b)両者は同じひずみ幅をもった波形であるが、波形の順序の違いがあり、この影響がヒステリシスループの平均応力の違いを生み出すことが分かるだろう。

こういうケースの場合でも、レインフロー法は該当するヒステリシスループを正確に拾い出すことができる。

次に、この手法のロジックを概説しよう。

■ 波形計数法の代表格はレインフロー法である

レインフロー法は、「多重の塔の屋根に流れる雨だれ」に例えられる。レインフロー法という名称はここから由来する。

ルール・ロジックは次の通りである。

【ルール1】 先ず、ひずみの時系列データを用意し、時間軸は鉛直方向、時刻の増加を下向きにとる。

(こう置くと、波形の形が多重の仏塔の屋根のように見え、波形の極値が屋根の先端と解釈できる。又、雨は重力により屋根に沿って流れる。)

【ルール2】 時刻歴データの中で最大のひずみ幅を形成している最小と最大ひずみ値を取り上げ(3点:最小-最大-最小、又は最大-最小-最大)、1点目を開始点、3点目を終了点とする。

【ルール3】 そして、総ての極値について上から順番に雨だれを流す。以下の条件を満たすと雨だれは停止し、雨だれが流れたレンジに対応してひずみ幅(ヒステリシスループ)が計数される、とする。条件を満たさなければ、雨だれは続けて屋根を流れていく。

条件1a: 極小値から流れ出した雨だれが屋根の先端にきた場合、続く直後の極小値が最初に流れ出した極小値より小さい値ならば雨だれは停止する。

条件1b: 極大値から流れ出した雨だれが屋根の先端にきた場合、続く直後の極大値が最初に流れ出した極大値より大きい値ならば雨だれは停止する。

条件2: 条件1a、又は条件1bの場合でも、雨だれが既に流れた箇所に来た場合、そこで雨だれは停止する。

【ルール4】 尚、極値からの順番の雨だれは、既に流れた部分は流れない、とする。

この解説だけでは解り難いと思われるので例を出して説明しよう。

例として、**図4.14**の左図のような波形を取り上げてみる。

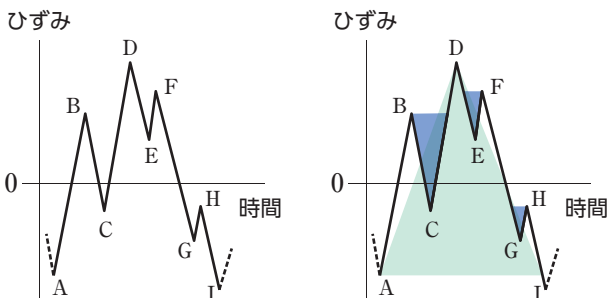


図4.14 ひずみ波形の例

この波形では、右図の青色三角形で示したように4つの閉じたひずみ幅(ヒステリシスループ)が含まれている。これらが上手く取り出されるかどうか、以下の説明で確認されたい。

● ルール1に従って、時間軸は鉛直方向、時刻の増加を下向きにとる。(図4.15)

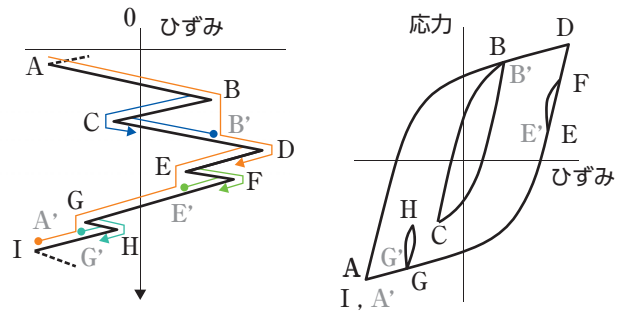


図4.15 レインフロー法の適用

● 最大のひずみ幅を形成している最小・最大ひずみ値はA-D-A' (I)であるので、Aが開始点、A' (I)が終了点となる。(ルール2)

● ルール3に従って、上部の極値から順次、雨だれを流す。条件1、又は2を満たせば所定のひずみ幅が計数される。以下、上部の極値Aから概略説明:

A) 極小値Aから流れた雨だれは、先端Bにきたが直後のCの極小値がAの値より大きいので(条件1aを満たさず)雨だれは更に流れる(A-B-B'-D)。同様な理由で、D-E-E'-G-G'と流れて行き、次の極小値Iが極小値Aより小さいのでまで流れ、A'で停止する。(条件1a)これで、ADA'のひずみ幅が計測される。

B) 極大値Bから流れ出した雨だれは、先端Cにきて直後Dの極大値がBの極大値より大きいのでDまで流れて行くが(条件1b)、途中のB'まで来て停止(条件2)。これで、BCB'のひずみ幅が計測される。

C) 極小値Cからの雨だれは、それ以前に既に流れているので流れず。(ルール4)

D) 極大値Dからの雨だれも、それ以前に既に流れているので流れず。(ルール4)

E) 極小値EからFへの流れは先端Fに来て、直後の極小値GがEより小さいのでGまで流れようとするが(条件1a)、E'で停止(条件2)。これで、EFE'のひずみ幅が計測される。

F) 極大値Fからの雨だれは流れず。(ルール4)

G) 極小値GからHへの流れは先端Hに来て、直後の極小値IがGより小さいのでIまで流れようとするが(条件1a)、G'で停止(条件2)。停止。
 これで、GHG'のひずみ幅が計測される。

H) 極大値Hからの雨だれは流れず。(ルール4)

このようにレインフロー法は、基本的なロジック(アルゴリズム)がしっかりと確立しているので、自動的に処理でき、コンピュータ処理に向いている手法と言えよう。

■ これがヒステリシスループの式だ

ここでは、ヒステリシスループに関する数式を述べる。

その前に、まず、その前提となるマッシングの仮説(Massing's hypothesis)というものを取り上げておこう。

これは、ヒステリシスループは前述した繰返し"応力-ひずみ"曲線から形成される、とした考えである。

具体的には、安定化された"応力-ひずみ"曲線の該当値(ひずみ、応力)を2倍に拡張し、引張側と圧縮側で対称な挙動を示すように形成されたものである。(図4.16)

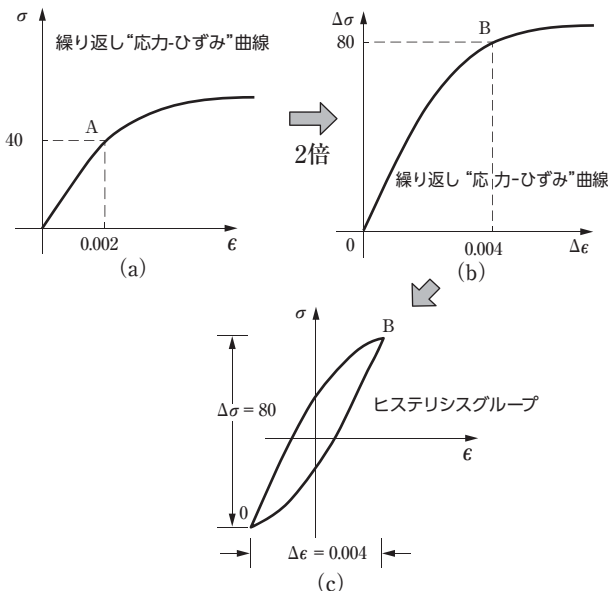


図4.16 マッシングの仮説とヒステリシスループ

この仮説に従って、ヒステリシスループの式は、前述した繰返し"応力-ひずみ"曲線、即ち、ランベルグ・オスグッドの式(4.3.8)から導かれる。ここに、再度、この式を書き下しておこう。

$$\epsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'} \right)^{\frac{1}{n}} \tag{4.3.8}$$

マッシングの仮説により、図4.16に示すようにカーブ上の点Aでの全応力幅 $\Delta\sigma$ 及び全ひずみ幅 $\Delta\epsilon$ は、

$$\Delta\sigma = 2\sigma, \quad \Delta\epsilon = 2\epsilon \tag{4.4.1}$$

となる。

従って、この前提を(4.3.8)式に代入すれば以下の式が得られる。

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n}} \tag{4.4.2}$$

これがヒステリシスループの式である。

念のために言えば、この(4.4.2)式は、あくまでも全ひずみ幅と全応力幅の関係を示している。

ヒステリシスループの全ひずみ幅と全応力幅の比は、マッシングの仮説の(4.4.1)式で設定したように、繰返し"応力-ひずみ"曲線上で該当するひずみと応力の値の比で構成されることになる。

直観的には、全ひずみ幅が大きければ全応力幅も大きくなり、その割合は繰返し"応力-ひずみ"曲線での応力とひずみの比に従う、という解釈だ。

実は、波形計数法にて見出されるヒステリシスループはこの考えに基づいて形成される。

これが妥当な理由として、次の事項が挙げられようか。

そもそも、疲労強度評価に重要な情報である疲労寿命 N_f は、両振りの交番荷重(ひずみ)から得られる。そして、その両振り交番荷重(ひずみ)から形成されるヒステリシスループは、概ね点対称となりマッシングの仮説に近い形状を有している、と考えられるからだ。

更に付け加えるならば、波形計数法にて見出されるヒステリシスループは、直接的にはひずみに関する情報しか得られない。

その為、応力に関しては、疲労寿命試験と同じヒステリシスループの形態を想定した方が正当である、と考えられる。

■ ひずみ幅と平均応力は如何に求めるのか

最後に、(4の2)章の最後で触れた3番目の設問:

(3) ひずみ-寿命関係式の中のひずみ振幅、応力、平均応力は如何に求めるのか。

について概説しよう。

既に示したように「ひずみ-寿命関係式」の類は以下の通りである。

マンソン・コフィン・モローの式:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (4.2.7)$$

スミス・ワトソン・トッパーの式:

$$\sigma_{\max} \frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{(\sigma'_f)^2}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f (2N_f)^{b+c} \quad (4.2.8)$$

この式中の未知数: N_f を求出するに当たって、その前に、既知であるはずのひずみ幅、応力、平均応力を如何に求めるか? というわけである。

まずは、ひずみの時刻歴波形から波形計数法(レインフロー)によってヒステリシスループが見出されたとしよう。

ここで、ヒステリシスループを形成している先端2点のひずみの値 ε_{t1} , ε_{t2} と全ひずみ幅 $\Delta \varepsilon$ は既知となるが、応力に関しては未知量である。

応力に関しては、前述した「繰返し"応力-ひずみ"曲線」と「ヒステリシスループの式」が活用される。

ε_{t1} の値を繰返し"応力-ひずみ"曲線、即ち、ランベルグ・オスグッドの式(4.3.8)に代入する。

$$\varepsilon_{t1} = \frac{\sigma_{t1}}{E} + \left(\frac{\sigma_{t1}}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (4.4.3)$$

この式から未知量である応力 σ_{t1} を、反復法などを使って解くことができる。

次に、全応力幅 $\Delta \sigma$ は既知の全ひずみ幅 $\Delta \varepsilon$ をマッシングの仮説に基づいて作られたヒステリシスループの式(4.4.2)に代入することで得ることができる。

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\Delta \sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta \sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (4.4.2)$$

以上より、

$$\sigma_{t2} = \sigma_{t1} - \Delta \sigma \quad (4.4.4)$$

平均応力 σ_m は次式より得られる。

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{t1} + \sigma_{t2}}{2} \quad (4.4.5)$$

念のため、各記号の意味を、[図4.17](#)に示しておく。

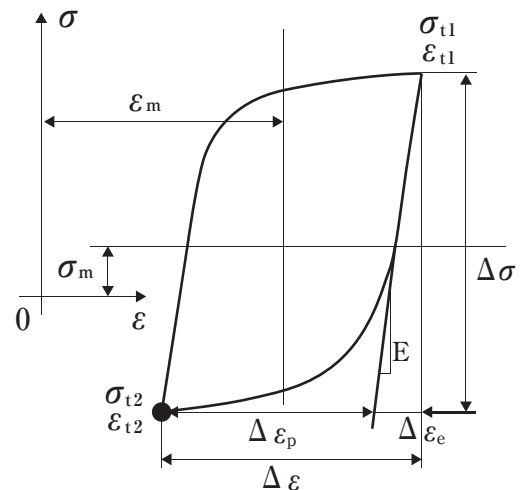


図4.17 各記号の意味

以上、(3の3)章、(3の4)章にて少し煩雑・難解と思われる部分に焦点を当て、補足説明をしてきた。

お忘れにはなっていないと思うが、低サイクル疲労の評価判定を行う為の要は、ひずみ-寿命関係式から疲労寿命を求め、それを評価判定式に当てはめることである。

(3の3)章、(3の4)章の肉付け説明は、その道筋へのアプローチ・助走路と解釈できよう。